# Travail & Énergie

# - L'Énergie Mécanique -

- Travail d'une force.
- Théorème de l'énergie cinétique.
- Energie mécanique d'un système.
- Diagramme d'énergie.
- Notion d'équilibre stable.

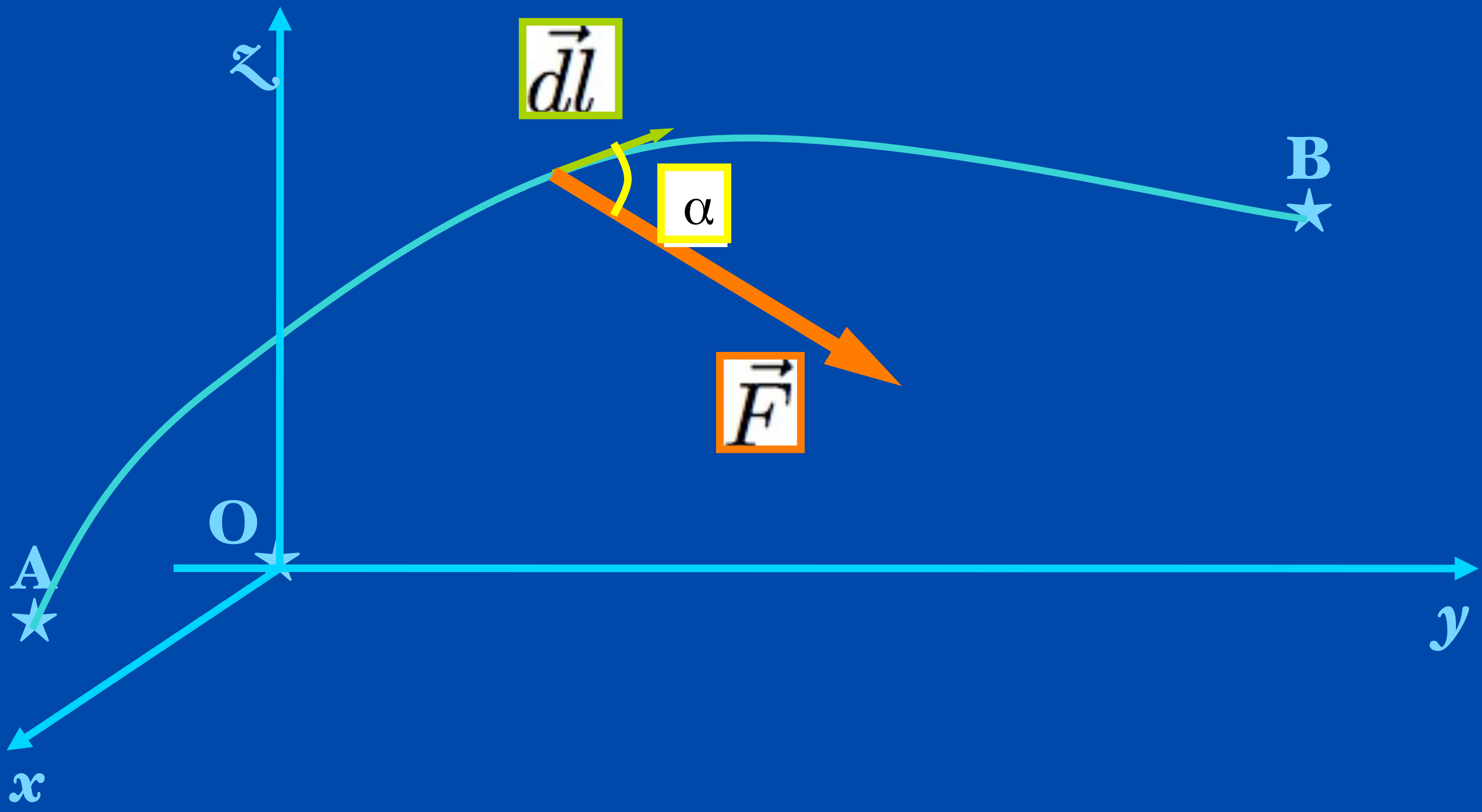
# I. Travail d'une force

- notion de travail W d'une force $\vec{F}$ :

En mécanique, une force $\vec{F}$ travaille lorsque son point d'application se déplace.

Ce qui n'est pas vraiment intuitif !

Exemple d'un bras qui soutient un poids : pas de travail au sens mécanique (mais au niveau physiologique, oui) !




Le travail élémentaire *dW* est le produit scalaire entre la force appliquée $\vec{F}$ et le déplacement élémentaire $\vec{dl}$ :

$$dW = \vec{F}\,.\,\vec{dl}$$

$$\boxed{dW = \vec{F}\,.\,\vec{dl}}$$

- On a donc :

$$dW = F\ dl\ cos\alpha$$

$$\text{avec } F = ||\vec{F}|| \text{ et } dl = ||\vec{dl}||$$

Si l'angle θ est aigü alors *dW*>0 : le travail est moteur

Si l'angle θ est obtu alors *dW*<0: le travail est résistant

$$\boxed{dW = \vec{F}\,.\,\vec{dl}}$$

- Mais on a aussi :

$$dW = F_x\ dx + F_y\ dy + F_z\ dz$$

Ou bien encore :

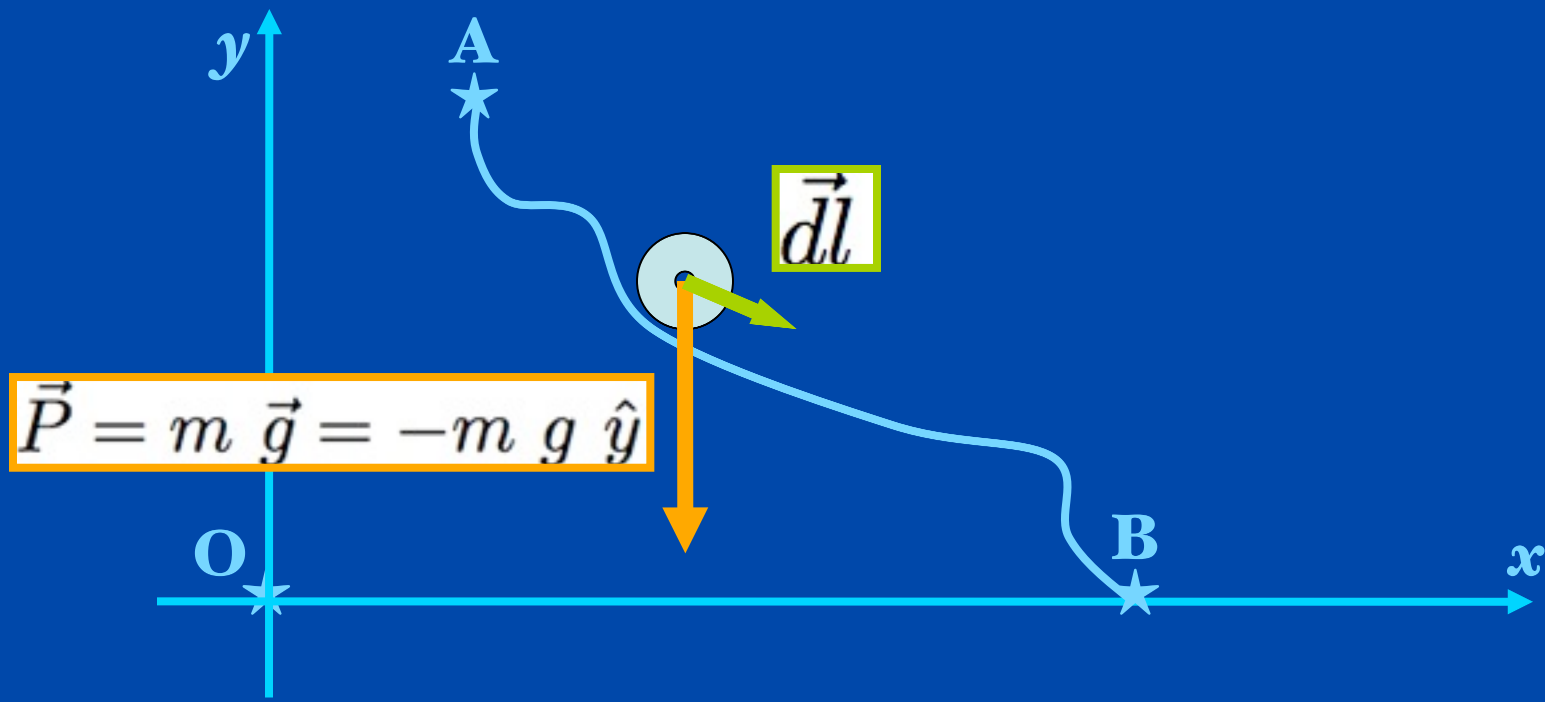
$$dW = F_r\ dr + F_\theta\ r\ d\theta + F_z\ dz$$

$$\boxed{dW = \vec{F} \, . \, \vec{dl}}$$

- Le travail total de la force $\vec{F}$ du point *A* au point *B* le long du trajet *AB* vaut quant à lui :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{AB} dW = \int_{AB} \vec{F} \, . \, \vec{dl}$$

# - Exemple 1 : Travail du poids




$$dW = m\ \vec{g} \,.\, \vec{dl} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = -m\ g\ dy$$

Et donc :

$$W_{A\to B} = \int_{y_A}^{y_B} -m\,g\,dy = -m\,g\,(y_B - y_A)$$

D'où :

$$W_{A\to B} = m\,g\,y_A - m\,g\,y_B$$

On voit ici clairement que le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi *AB* mais seulement de l'altitude du point de départ *A* et de celle du point d'arrivée *B*.

La propriété précédente est le propre des **forces conservatives**, forces auxquelles on associe des énergies potentielles U.

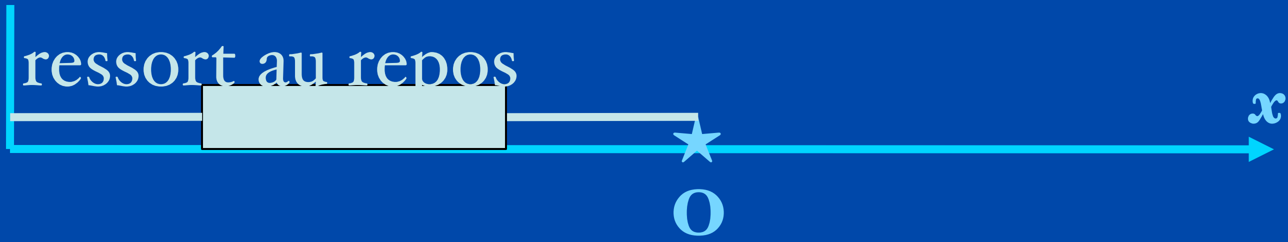
Ici (i.e. pour le poids) : $$U = m\ g\ y$$

Et l'on a :

$$W_{A\to B} = U_A - U_B = U_{\text{initial}} - U_{\text{final}}$$

Le travail d'une force conservative est donc égal à l'énergie potentielle à l'état initial - l'énergie potentielle à l'état final.

# - Exemple 2 : Cas du ressort





$$F_x = -\|\vec{F}\| = -k|x| = -kx$$


$$F_x = +\|\vec{F}\| = +k|x| = -kx$$

$$dW = \vec{F}\,.\,\vec{dl} = \begin{pmatrix} -kx \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} = -k\;x\;dx$$

Et donc :

$$W_{A\rightarrow B} = \int_{x_A}^{x_B} -k\,x\,dx = -k(\frac{x_B^2}{2} - \frac{x_A^2}{2})$$

D'où :

$$W_{A\rightarrow B} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

Là encore : le travail de la force de rappel exercée par un ressort ne dépend que du point de départ et de celui d'arrivée.

Cette force est donc elle aussi conservative.

On lui associe une énergie potentielle élastique U (ou $U_e$) telle que :

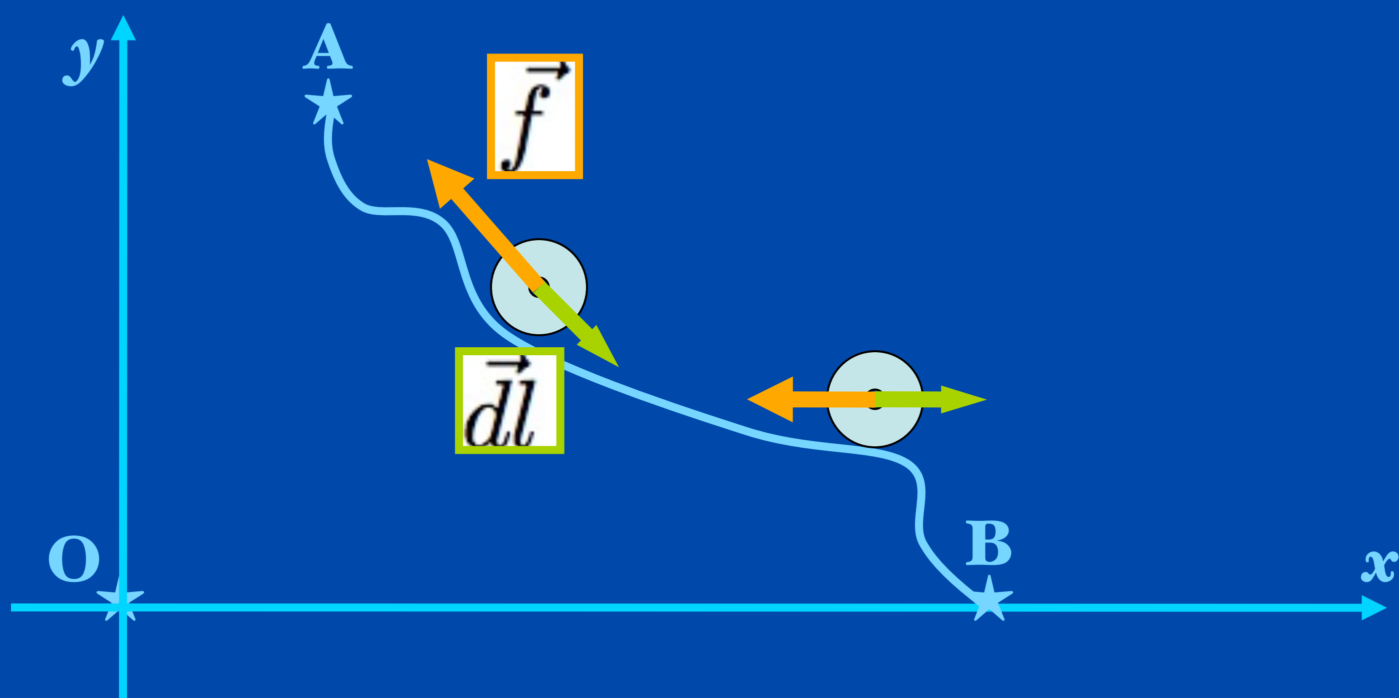
$$U_e = \frac{1}{2}\, k\, x^2$$

Et l'on a toujours :

$$W_{A\rightarrow B} = U_{\text{initial}} - U_{\text{final}}$$

# - Exemple 3 : Cas d'une force non-conservative

On reprend l'exemple 1 (celui sur le travail du poids), mais en considérant cette fois le travail des forces de frottements solide-solide (secs).



=> Les forces de frottement solide-solide sont // au plan et de sens opposé au mouvement (i.e. à $\vec{dl}$).

On a donc :

$$dW = \vec{f}.\vec{dl} = \|\vec{f}\| \; \|\vec{dl}\| \; cos(\pi) = -f \; dl$$

D'où :

$$W_{A\rightarrow B} = \int_{AB} -f \, dl = -f \int_{AB} dl = -f \; l_{AB}$$

Ici le travail ***W*** dépend explicitement du chemin suivi entre l'état initial et l'état final => $\vec{f}$ n'est pas une force conservative => pas d'énergie potentielle associée.

# - Notion de Puissance...

La puissance instantanée est la dérivée du travail par rapport au temps :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \, . \, \frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{F} \, . \, \vec{v}$$

Quant à la puissance moyenne elle vaut donc :

$$P_{\mathrm{moy}} = \frac{W}{t}$$

# - Unités et dimensions

- Le travail ***W*** se mesure en Joules (J) et est homogène à une énergie :

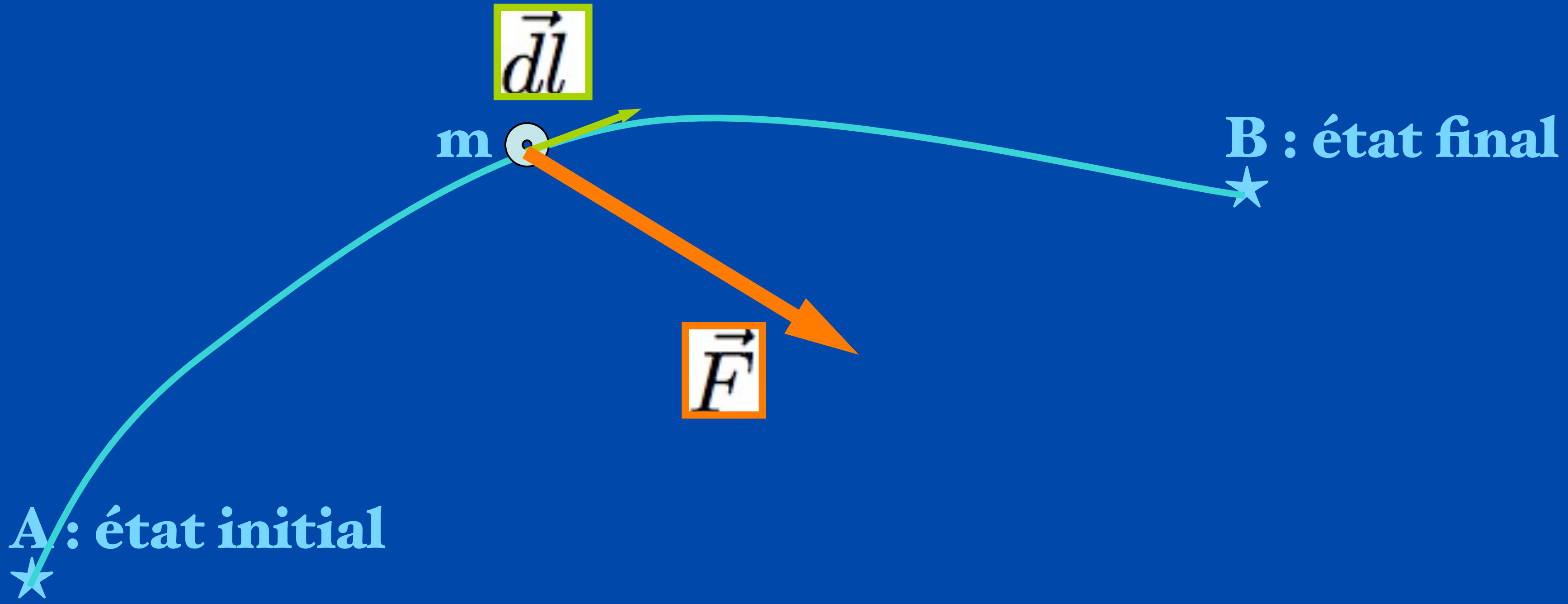
  $[\boldsymbol{W}] = ML^2T^{-2}$.

- Quant à la puissance ***P***, elle se mesure en J/s (Joules/seconde), c'est à dire en Watts (W), et est de dimension :

  $[\boldsymbol{P}] = ML^2T^{-2}/T = ML^2T^{-3}$.

- Du coup, il arrive de voir le travail (une énergie) mesuré en Watt*heure, par exemple...

# II. Théorème de l'énergie cinétique




On a d'après la 2ème Loi de Newton :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Et d'autre part :

$$\vec{dl} = \vec{v}\ dt$$

Et donc :

$$dW = \vec{F}\,.\,\vec{dl} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\,\vec{v}\,dt = m\,\vec{v}\,d\vec{v}$$

Par conséquent :

$$W_{A\rightarrow B} = \int_{v_A}^{v_B} m\,\vec{v}\,d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Or nous savons par définition de l'énergie cinétique que :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

On a donc :

Le travail entre état initial et état final est égal à : énergie cinétique finale - énergie cinétique initiale

$$W = E_c^{\text{finale}} - E_c^{\text{initiale}}$$

# ¡¡¡ Mefi !!!

- On a d'un côté :

$$W = E_c^{\text{finale}} - E_c^{\text{initiale}}$$

... qui est une relation valable tout le temps.

- Et de l'autre côté :

$$W = U^{\text{initiale}} - U^{\text{finale}}$$

... qui n'est valable que pour les forces conservatives.

# III. Energie mécanique d'un système

- **1er cas** : toutes les forces mises en jeu sont ***conservatives***.

On peut donc définir l'énergie potentielle totale du système (qui va être la somme des énergies potentielles des sous-systèmes), et on peut donc écrire :

$$E_c^f - E_c^i = W = U^i - U^f$$

On a donc :

$$E_c^f + U^f = E_c^i + U^i = E$$

E est ***l'énergie mécanique totale du système***

Et l’on a :

$$E^f = E^i$$

***L’énergie mécanique totale du système se conserve !***

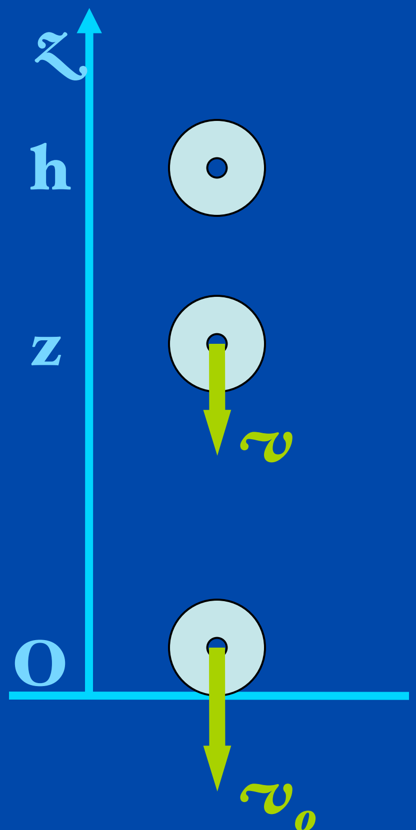
(D’où le sens de l’adjectif «conservatives» pour les forces qui sont associées à une énergie potentielle : en effet ces forces conservent l’énergie mécanique du système)

# Exemple d'application

{Ex. 3, feuille TD#3}

Reconsidérons le cas de la chute libre...

Un objet de masse $m$ est lâché de la hauteur $h$ sans vitesse initiale. Ecrire son énergie mécanique :




(a) à la hauteur $h$.

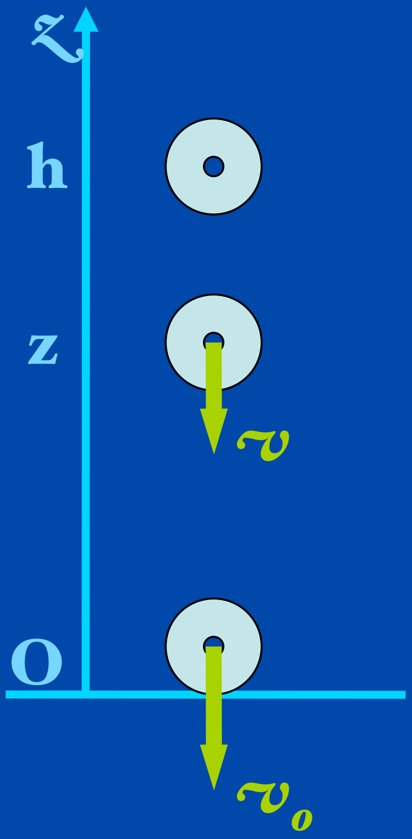
(b) à la hauteur $h > z > 0$.

(c) au sol.

En déduire :

(a) la vitesse $v_o$.

(b) la vitesse $v$ en fonction de $z$.




$$E = m\,g\,h$$

$$E = m\,g\,z + \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

$$E = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2$$

L'énergie mécanique se conserve, on a donc :

$$m\,g\,h = m\,g\,z + \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2$$

D'où, d'une part :

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 \Rightarrow v_0^2 = 2\,g\,h$$

Et d'autre part :

$$mgh = mgz + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2g(h - z)$$

- **2me cas** : toutes les forces mises en jeu ***ne sont pas*** conservatives.

Le théorème de l'énergie cinétique est toujours vrai :

$$E_c^f - E_c^i = W$$

Si on distribue le travail total en travail des forces conservatives et non-conservatives, on va avoir :

$$W = W_{\mathrm{f.\,cons.}} + W_{\mathrm{f.\,non-cons.}}$$

Or : $$W_{\mathrm{f.\,cons.}} = U^i - U^f$$

Et : $$W_{\mathrm{f.\,non-cons.}} = \int_i^f \vec{F}_{nc}\,\vec{dl}$$

Donc :

$$(E_c^f + U^f) - (E_c^i + U^i) = \int_i^f \vec{F}_{nc}\, d\vec{l}$$

Par conséquent :

$$E^f - E^i = W_{\mathrm{f.\ non-cons.}} \neq 0$$

***L'énergie mécanique n'est plus conservée !***

**Deux exemples :**

**- cas des forces de frottement**
**=> travail résistant**
**=> l'énergie mécanique diminue ($E^f < E^i$).**

**- cas d'une force de traction**
**=> travail positif**
**=> l'énergie mécanique augmente ($E^f > E^i$).**

## EN RÉSUMÉ :

- **Travail :** $$\boxed{dW = \vec{F}\,.\,\vec{dl}}$$

- **Forces conservatives :**

$$W = U^{\text{initiale}} - U^{\text{finale}}$$

$$W = E_c^{\text{finale}} - E_c^{\text{initiale}}$$

$$E_c^f + U^f = E_c^i + U^i = E$$

- **Forces non-conservatives :**

$$W = E_c^{\text{finale}} - E_c^{\text{initiale}}$$

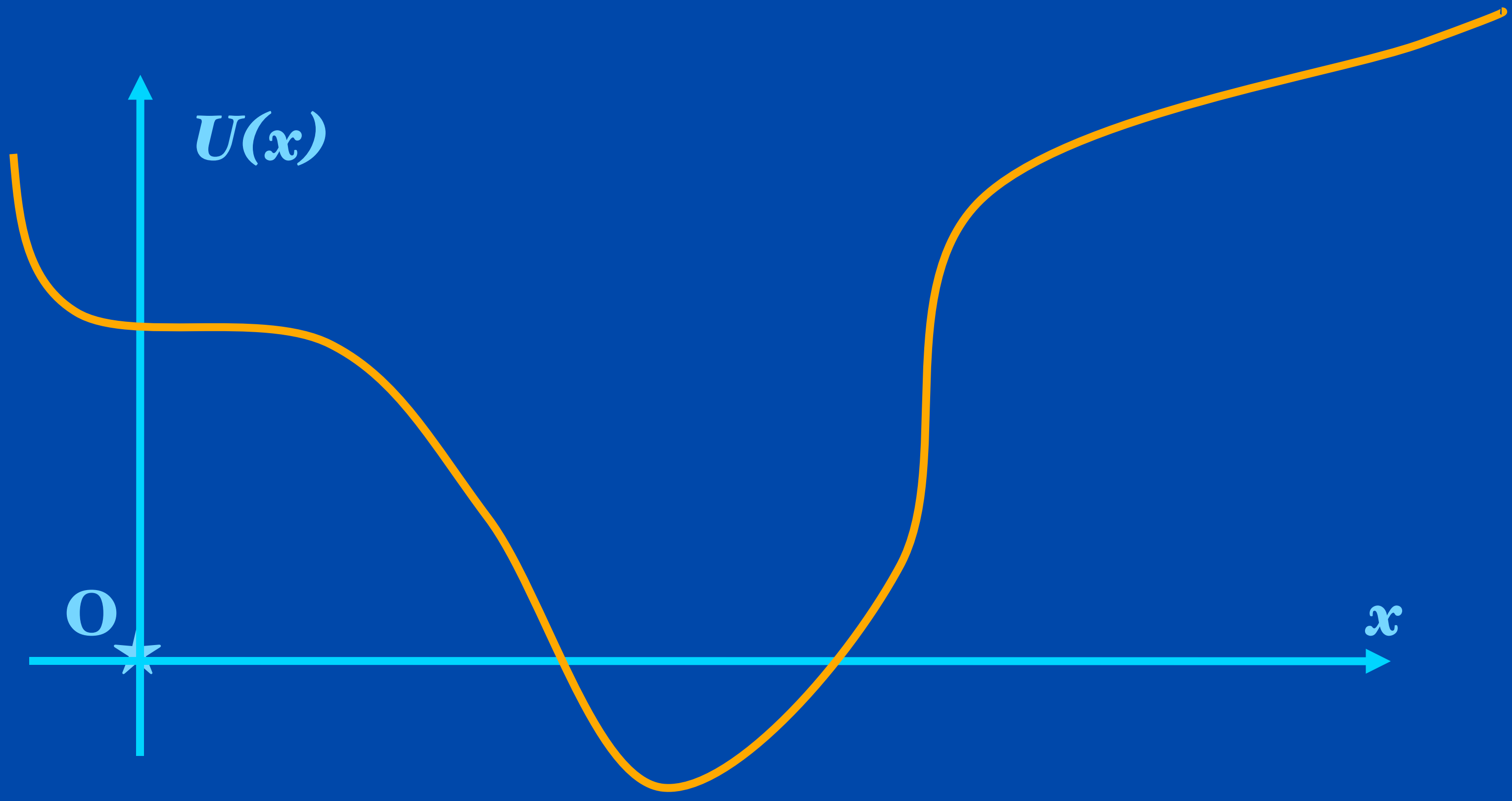
$$E^f - E^i = W_{\text{f. non-cons.}} \neq 0$$

# IV. Diagramme d'énergie

- On va exploiter ici la conservation de E, et donc s'intéresser à des forces conservatives (et à leurs énergies potentielles associées).

- On va se borner à des mouvements à un seul degré de liberté (évolution selon un seul axe de coordonnées).

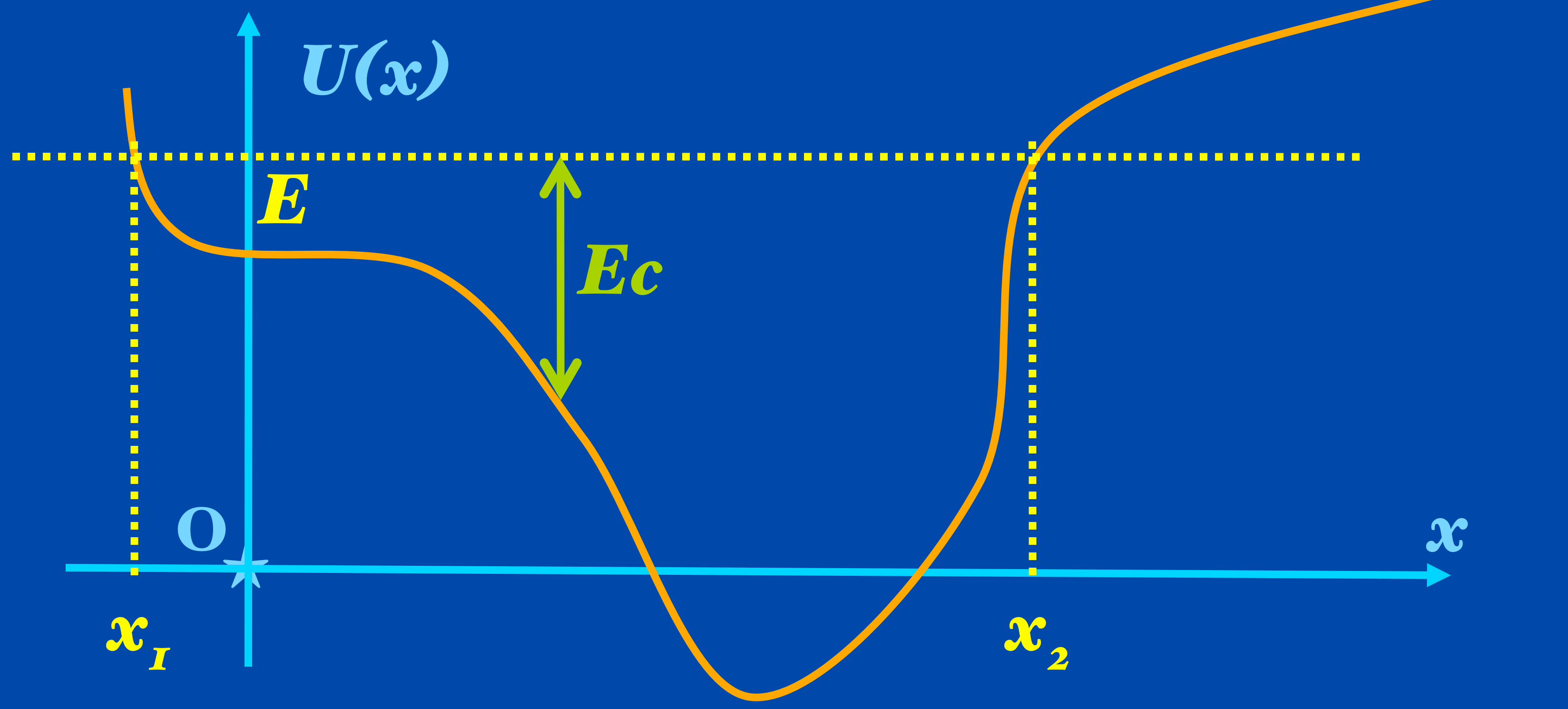
- Prenons U(x) quelconque :



- On a toujours : $E = E_c + U$
- Or : $E - U = E_c = 1/2\ m v^2 > 0$ (forcément!)
- Donc : $E > U(x)$

... sinon le mouvement est impossible !

($E < U \Leftrightarrow 1/2\ m v^2 < 0 \Leftrightarrow v$ imaginaire !)



- **Remarque 1 :**

$E > U(x)$ impose que la seule région du diagramme dans laquelle peut évoluer $U(x)$ soit comprise entre $x_1$ et $x_2$ (en x, et entre E et min(U) en U, bien sûr).

- **Remarque 2 :**

À tout instant $E - U(x) = E_c$

En particulier : $E_c(x_1) = E_c(x_2) = 0$,

et donc : $v(x_1) = v(x_2) = 0$

=> On a un mvt périodique entre $x_1$ et $x_2$ !

# V. Notion d'équilibre stable

Un équilibre est stable lorsque le corps en question revient à sa position d'équilibre quand on en l'écarte.

Sur U(x) ça se traduit, en $x_e$, par :

- **$U'(x_e) = 0$ : équilibre**
- **$U''(x_e) > 0$ : équilibre stable**

# Exemple d'application

Dérivées par rapport à la position de l'énergie potentielle liée au ressort (Ex 3.1 TD#0)...

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$U' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{1}{2}k\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = kx$$

$$U'' = \frac{d}{dx}(kx) = k$$

• D'une part, on a, lorsque le ressort est au repos (et donc à la position d'équilibre $x_e$) :

$$U'(x)|_{x=x_e} = kx_e$$

Et donc :

$$U'(x)|_{x=x_e} = 0 \Rightarrow x_e = 0$$

=> la position d'équilibre est : $x_e = 0$.

• D'autre part, toujours à la position d'équilibre, on a :

$$U''(x)|_{x=x_e} = k > 0$$

=> la position d'équilibre est stable.