Mécanique et Analyse Dimensionnelle

En Mécanique on définit trois grandeurs fondamentales :

- la longueur L	[longueur] = L
- le temps T	[temps] = T
- la masse M	[masse] = M

Analyse Dimensionnelle - Principes

- La dimension d'une grandeur mécanique s'exprime en fonction des dimensions fondamentales L, T et M.

- La dimension d'une vitesse v, notée {v}, s'exprime ainsi L /T, ou LT^{-1}.

¡¡ Ne pas confondre ces grandeurs avec les unités correspondantes (mètre, seconde, kilogramme) !!

Analyse Dimensionnelle - Buts

- Permettre de vérifier qu'une expression est correcte vis-à-vis des grandeurs mises en jeu

- Établir *ex novo* l'expression littérale liée à un phénomène physique

¡¡ Toujours à une constante numérique près !!

Analyse Dimensionnelle – Exemple d'application #1 {Ex.1.1, feuille de TD #0}

1.1 Dimensions usuelles

Trouver la dimension des grandeurs suivantes :

1. surface S, volume V, masse volumique ρ ;
2. accélération a, force F ;
3. vitesse angulaire $\dot{\theta}$, accélération angulaire $\ddot{\theta}$;
4. travail W, énergie cinétique E_c, énergie potentielle U ;
5. puissance P, pression $\mathcal{P}$.

Analyse Dimensionnelle – Exemple d'application #1 {Ex.1.1, feuille de TD #0}

- $[S]=L^2$, $[V]=L^3$, $[\rho]=ML^{-3}$
- $[a]=LT^{-2}$, $[F]=MLT^{-2}$
- $[d\theta/dt]=T^{-1}$, $[d^2\theta/dt^2]=T^{-2}$
- $[W]=[E_c]=[U]=ML^2T^{-2}$
- $[\text{Puissance}]=ML^2T^{-3}$
  $[\text{Pression}]=ML^{-1}T^{-2}$

Analyse Dimensionnelle –
Exemple d'application #2
{Ex.1.2, feuille de TD #0}

1.2 Le ressort

Un ressort est caractérisé par sa constante de raideur k et sa longueur au repos l_0. Lorsqu'il subit une déformation, l_0 devient alors $l \neq l_0$, et il exerce une force de rappel de module $F = k\,\|l - l_0\|$.

1. Quelle est la dimension de k ?
2. Montrer que l'expression $\frac{1}{2}\,k\,(l - l_0)^2$ est homogène à une énergie.

Analyse Dimensionnelle – Exemple d'application #2
[Ex.1.2, feuille de TD #0]

1. $k = F/||l - l_0||$ => $[k] = MT^{-2}$

2. => $[1/2\ k\ (l - l_0)^2] = ML^2T^{-2}$

Analyse Dimensionnelle –
Exemple d'application #3
{Ex.1.4, feuille de TD #0}

1.4 Oscillations

Une masse m oscille à l'extrémité d'un ressort linéaire horizontal de constante de raideur k avec une amplitude X_0.

1. En admettant que sa période τ ne dépende que de m, k et X_0, déterminer l'expression littérale de τ.

2. Même question pour un pendule (fil inextensible de longueur l, masse m) soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.

Analyse Dimensionnelle –
Exemple d'application #3
{Ex.1.4, feuille de TD #0}

$\tau = f(m, k, X_0)$

avec $[m]=M$, $[k]=MT^{-2}$, $[X_0]=L$, $[\tau]=T$

$\Rightarrow [\tau]=[m]^a\,[k]^b\,[X_0]^c$

$\Rightarrow T=M^a\,(MT^{-2})^b\,L^c=M^{a+b}\,L^c\,T^{-2b}$

$\Rightarrow a+b=0 \qquad\qquad \Rightarrow a=1/2$

$c=0$

$-2b=1 \Rightarrow b=-1/2$

$\Rightarrow [\tau] = [m]^{1/2}\,[k]^{-1/2} \Rightarrow \tau \propto (m/k)^{1/2}$

Donc : on voit ici que la période des oscillations τ est PROPORTIONNELLE À $(m/k)^{1/2}$, et NE DÉPEND donc PAS de l'amplitude des oscillations ! (En effet : $\tau = 2\,\pi\,(m/k)^{1/2}$!)

Analyse Dimensionnelle –
Une dernière remarque
[Ex.1.5, feuille de TD #0]

1.5 Chute libre

Déterminer l'expression littérale de la vitesse d'arrivée au sol d'une masse m abandonnée sans vitesse initiale à une hauteur h au dessus du sol et soumise à $\vec{g}$.

Ici, vous allez trouver que la vitesse d'arrivée au sol NE DÉPEND PAS de m !... Voir aussi (vers 1:20 puis 2:50) :

http://www.dailymotion.com/video/x29d6ik_une-boule-de-bowling-et-une-plume-tombent-en-meme-temps_news